CURSO DE ÁLGEBRA LINEAL Y GEOMETRÍA. Vol. 1.

LUCÍA CONTRERAS CABALLERO.

Profesora jubilada del Depto. de Matemáticas. Fac. de Ciencias.
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID.

Registrada la séptima versión de esta obra en 2012 como Curso de Álgebra Lineal en el Registro de la Propiedad Intelectual de la Comunidad de Madrid con número de asiento registral 16/2012/7857.

Estoy agradecida a Isabel Contreras Caballero y a Isabel García Contreras, quienes me han facilitado las instrucciones para adaptarme al formato del libro.

Lucía Contreras Caballero. Profesora Titular Numeraria Jubilada.
Departamento Matemáticas. Facultad de Ciencias. Universidad Autónoma de Madrid.

TABLA DE CONTENIDOS.

NÚMEROS COMPLEJOS.

Introducción.

Los distintos tipos de números han ido apareciendo en la historia del hombre progresivamente, según las necesidades de las actividades que realizaba y son estudiados hoy también progresivamente desde la escuela primaria a la Universidad.

Debido a la necesidad de contar las cabezas de ganado surgieron los números naturales, (que son todos positivos) con los que se puede sumar; los números enteros, (que pueden ser positivos o negativos e incluyen al cero) sirven para indicar los intercambios de mercancías y dinero; con ellos se puede sumar y restar. La multiplicación es una forma más rápida de hacer una suma de sumandos iguales y entonces se plantea el problema de hacer la operación inversa a la multiplicación que es la división, pero esta operación no siempre tiene solución con números enteros, por lo que se crearon otros números llamados fraccionarios o racionales.

Los números enteros se caracterizan por el hecho de que cualquier ecuación de la forma $x + a = b$ tiene solución cuando los números que aparecen en ella son enteros.

Los números fraccionarios se caracterizan por el hecho de que cualquier ecuación de la forma $a_1x + a = b$ tiene solución cuando los números que aparecen en ella son fraccionarios y $a_1 \neq 0$.

Hay otro conjunto de números en los que también la ecuación $a_1x+a = b$ tiene solución si $a_1 \neq 0$, son los números reales que se construyen como límites de sucesiones de números fraccionarios. Los números reales incluyen a los fraccionarios. La ecuación anterior es una ecuación de primer grado con una incógnita, que también se puede escribir $a_1x+a_0 = 0$. Nos podemos plantear el problema sobre si una ecuación más general: $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$ tiene siempre solución cuando los números que aparecen en ella son reales. La respuesta es que no y para obtener respuesta positiva tenemos que construir otro conjunto de números que se llama números complejos y se designa por $\mathcal{C}$.

Hay ejemplos de ecuaciones de segundo grado que no tienen solución real. La ecuación más simple que no tiene solución real es $x^2 + 1 = 0$. La ecuación general de segundo grado, de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ tiene la solución $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ pero si $b^2-4ac < 0$ no encontramos ningún número real para x.

Lo asombroso es que escribiendo por i un número imaginario que satisfaga $i^2 + 1 = 0$, encontramos números, llamados complejos, que son soluciones de todas las ecuaciones de segundo grado planteadas. Ya que si $b^2 - 4ac < 0$, tenemos $\sqrt{b^2 - 4ac} = i\sqrt{4ac - b^2}$ que tiene un sentido imaginario. Entonces, el conjunto de los números soluciones de todas las ecuaciones de segundo grado que se pueden plantear es el conjunto de los binomios de la forma $\frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ donde el segundo sumando puede ser real o imaginario. Éste es el conjunto de los números complejos en el que $i^2 = -1$ por ser i solución de la ecuación $x^2 + 1 = 0$. Los representaremos, en general, como $a + bi$, donde a y b son ahora números reales cualesquiera. El conocimiento de las propiedades de las operaciones de los números complejos amplía la cantidad de ecuaciones que podemos resolver. Es muy importante y sorprendente el teorema fundamental del álgebra que afirma que cualquier ecuación de grado n con coeficientes complejos tiene siempre al menos un número complejo como solución.

Haciendo ingeniosas combinaciones con los coeficientes de la ecuación de tercer grado, del Ferro y Tartaglia encontraron la forma general de sus soluciones, que ha pasado a la historia como fórmula de Cardano. La resolución de la ecuación de cuarto grado fué reducida a la solución de la ecuación de tercer grado por Ferrari. Pero el problema es mucho más difícil si el grado de la ecuación es mayor, no estando claro ni siquiera que la ecuación tenga solución. En este sentido, la importancia de los números complejos, de los que hemos hablado en la introdución, y del **Teorema Fundamental del Algebra** demostrado por Gauss estriba en que afirma que **cualquier ecuación de grado n con coeficientes complejos tiene siempre al menos un número complejo como solución**. Este teorema afirma la existencia de la solución pero sigue quedando el problema de cómo encontrarla efectivamente. Durante mucho tiempo, los matemáticos estuvieron buscando una fórmula general para todas las ecuaciones de un cierto grado expresada por raices de expresiones racionales de sus coeficientes, hasta que un matemático llamado Abel demostró que esta forma general expresada por radicales común para todas las ecuaciones de un cierto grado no existía a partir de grado 5. Más tarde, otro matemático llamado Galois encontró las condiciones necesarias y suficientes que han de verificar los coeficientes de la ecuación para que sus soluciones se puedan expresar por radicales. Aún hoy no todas las ecuaciones están resueltas y en eso trabajan los algebristas.

Sin embargo, se puede demostrar y lo demostraremos más adelante que, debido a las propiedades de los números complejos, si los coeficientes de la ecuación son reales las soluciones complejas aparecen por parejas conjugadas de la misma multiplicidad. Y de aquí, que toda ecuación de grado impar con coeficientes reales tiene al menos una solución real.

El Algebra es el estudio de la resolubilidad de las ecuaciones; en cuanto que las ecuaciones se resuelven haciendo operaciones con los coeficientes que aparecen en ellas, el álgebra es también el estudio de las propiedades de las operaciones que podemos hacer con esos números.

En este capítulo repasaremos algunos resultados de bachillerato, los generalizaremos y además estudiaremos ciertas propiedades de los números complejos que nos servirán para ampliar la cantidad de ecuaciones que sabemos resolver.

MATRICES. SUS OPERACIONES.

Introducción.

Definición: Una matriz es una disposición rectangular y entre paréntesis de números; Es por tanto, una tabla de números entre paréntesis y tiene un determinado número de filas, que llamamos m y un determinado número de columnas que llamamos n. Entonces se dice que la matriz es $m \times n$.

Puede ser de números positivos, de números enteros, de números racionales, de números reales o de números complejos.

Las tablas aparecen bastante en la vida cotidiana. P. ej. la tabla de valores de compra y venta de distintas monedas con una fija (sea ésta el euro), es una tabla de tantas filas como monedas consignemos y de dos columnas. Otro ejemplo es la tabla de porcentaje de composición de unos alimentos determinados según los hidratos de carbono, grasas y proteínas; ésta es una tabla de tantas filas como alimentos hayamos listado y tres columnas. Las presiones y temperaturas de un conjunto de n gases forman una tabla de dos filas y n columnas. Las tablas se transforman en matrices cuando sus datos son utilizados para cálculos.

Una matriz de una fila y una columna es un número entre paréntesis.

La derivada de una función real de variable real es un número, y se generaliza a la derivada de una función real de varias variables por una matriz de una fila y varias columnas, cada una de las cuales es una derivada parcial. De especial interés en física son las derivadas de una función real de tres variables, que se llaman gradientes y son tres números entre paréntesis.

Un punto de R^3 se representa por tres coordenadas entre paréntesis, lo cual es una matriz 1×3. Algunas veces, para comodidad de cálculo, un vector de R^3 se representa por los números en columna; entonces es una matriz 3×1.

En álgebra lineal aparecen las matrices $m \times n$ al expresar de forma global los sistemas de ecuaciones lineales de m ecuaciones con n incógnitas. Para ello se define el producto de matrices.

También se utilizan para expresar las aplicaciones llamadas lineales y los productos escalares. Y para relacionar distintos sistemas de coordenadas en el mismo espacio vectorial.

Ciertas operaciones del conjunto de números que aparecen en la matriz se trasfieren a operaciones con las matrices pero no siempre con las mismas propiedades que las operaciones de los números de los que están formadas. Nuestro objetivo en este capítulo es definir y estudiar dichas operaciones.

MÉTODO DE GAUSS Y REDUCCIÓN DE GAUSS-JORDAN.

Introducción.

Los sistemas de ecuaciones lineales aparecen frecuentemente en problemas elementales de otras ciencias y de la vida corriente. Como ejemplo se enuncian aquí varios problemas de esos:

1. Averiguar si los planos de ecuaciones:

$$\pi_1 \equiv \ -y+z=2, \quad \pi_2 \equiv \ 3x+6y+z=-5, \quad \pi_3 \equiv \ 2x+4y-2z=-3$$

tienen un punto común.

Sol: pto común: $1/8(21,-17,-1)$

2. Determinar si en R^3 las rectas siguientes se cortan:

$$r_1 \equiv \left.\begin{array}{cccc} 2x & +3y & +z & =5 \\ x & -3y & & =4 \end{array}\right\} \qquad r_2 \equiv \left.\begin{array}{cccc} x & +y & & =2 \\ & y & -z & =-1 \end{array}\right\}$$

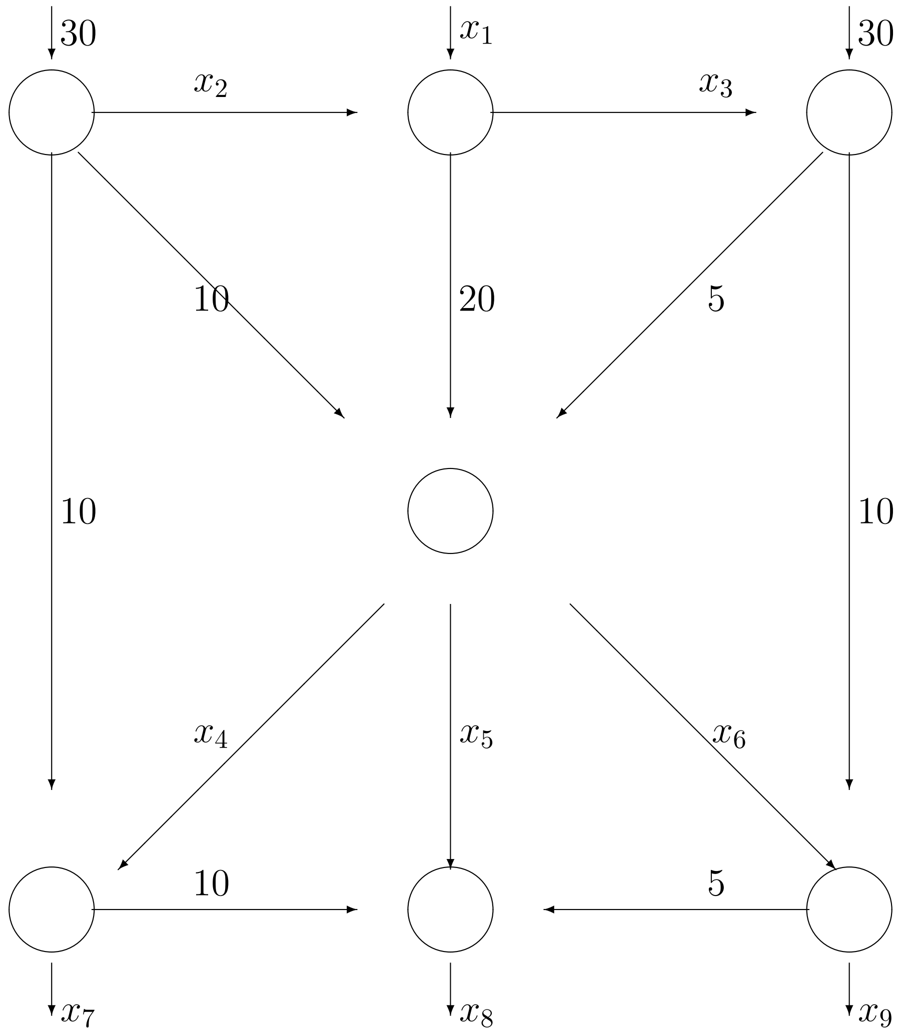
Sol: no se cortan.

3. Ajustar la reacción:

$$xIO_3Na + ySO_3HNa \to zSO_4Na_2 + uSO_4HNa + vH_20 + wI_2$$

Sol: $x=2w, y=5w, z=2w, u=3w, v=w.$

4. En la red de tráfico del dibujo de la página siguiente, se conocen las cantidades de coches que circulan en dos entradas y en algunos tramos. Se desea conocer las cantidades de coches que circulan en todos los tramos. Se podría colocar un contador en cada tramo desconocido, entonces harían falta nueve contadores, sin embargo, se puede demostrar que dos contadores son suficientes, porque los tráficos en los distintos tramos están relacionados. Demuéstrese.



Resolver un sistema de ecuaciones lineales es hallar, cuando es posible, todos los valores de las incógnitas que satisfacen todas las ecuaciones del sistema. Supondremos que los coeficientes de las incógnitas en las ecuaciones son reales o complejos. La teoría que vamos a desarrollar vale siempre que los coeficientes estén en un cuerpo.

Si no es posible encontrar esos valores, el sistema se llama incompatible. Si es posible encontrarlos, distinguimos el caso en que estos valores están determinados unívocamente, llamando al sistema compatible determinado, del caso en que hay infinitos valores, llamándolo entonces compatible indeterminado.

En Bachillerato se han visto los métodos de eliminación, reducción y sustitución para resolver sistemas de ecuaciones lineales. Cada sistema concreto puede resolverse o verse si es incompatible usando uno de estos métodos. El **Método de Gauss** es una combinación sistemática de los métodos de eliminación y sustitución válida para todos los sistemas. Habiendo garantía de poder decidir si un sistema dado cualquiera es incompatible o compatible y resolverlo en este caso, por dicho método.

Algunas veces sólo interesa saber si el sistema es incompatible, compatible determinado o compatible indeterminado, sin llegar a resolver efectivamente el sistema. Veremos que esto también se puede hacer, estudiando la evolución de los sistemas en la primera parte del método de Gauss. (eliminación).

En ese momento, el sistema es incompatible si y sólo si la última ecuación es incompatible, lo cual se traduce en que la matriz escalonada del sistema tiene un escalón menos que la matriz escalonada ampliada del sistema (véase el último ejemplo).

Si la última ecuación es compatible, en cuyo caso las dos matrices escalonadas mencionadas tienen el mismo número de escalones, el sistema es compatible indeterminado cuando queda indeterminada alguna de las ecuaciones al ir sustituyendo, regresivamente en las ecuaciones anteriores, los valores de las incógnitas determinadas. Se observa que queda alguna ecuación indeterminada si y sólo si alguno de los escalones de la matriz del sistema tiene longitud superior a una columna (véanse los ejemplos 3, 4 y 5); habiendo entonces alguna ecuación indeterminada con más de una incógnita donde se pueden pasar al segundo miembro las incógnitas correspondientes a las columnas que no dan escalón y despejar las otras en función de ellas, lo que da la indeterminación.

El sistema es determinado si todas las ecuaciones quedan determinadas, lo cual sólo ocurre cuando todos los escalones son de una columna (véase el ejemplo 2).

DETERMINANTES y SISTEMAS de ECUACIONES.

Introducción.

Los determinantes de las matrices son números asociados a dichas matrices.

Hemos visto matrices asociadas a los sistemas de ecuaciones. Veremos que cuando calculamos determinantes de esas matrices y de submatrices suyas, obtenemos información sobre la compatibilidad y determinación de dichos sistemas.

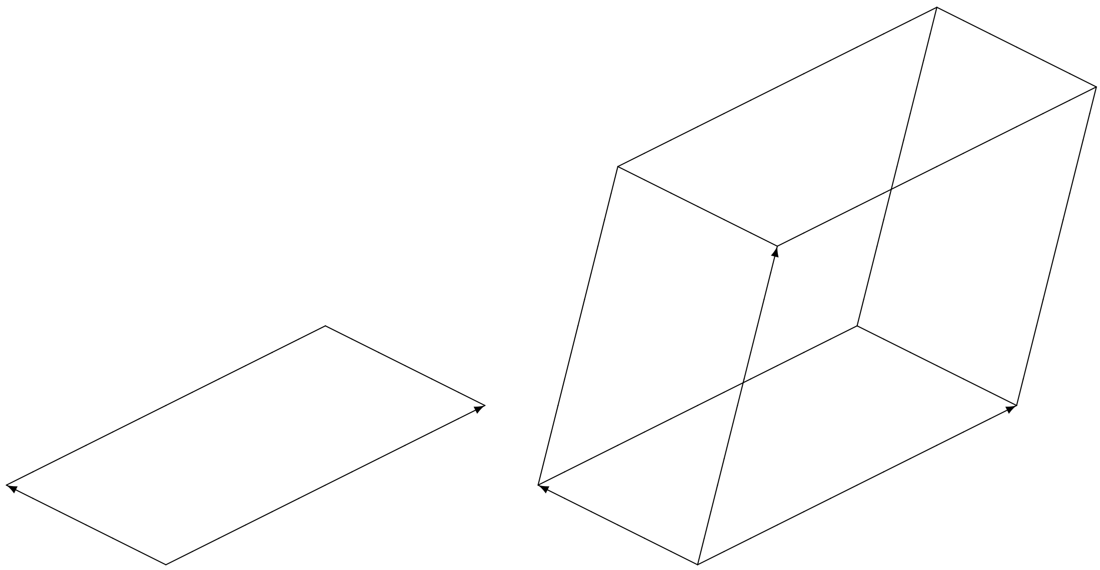
Los determinantes también tienen interpretación geométrica. Vamos a empezar motivando su definición por su significado geométrico.

Escribiendo en filas las coordenadas de un vector de la recta (en un vector unidad fijado), de dos vectores del plano (en un sistema de referencia bidimensional cartesiano) o de tres vectores del espacio (en un sistema de referencia tridimensional cartesiano), tenemos, respectivamente, una matriz 1×1, una matriz 2×2 o una matriz 3×3:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Al mismo tiempo, dado un vector en $\mathcal{R}$, podemos considerar su longitud, que es un número, que coincide con su coordenada; dados dos vectores, podemos construir un paralelogramo cuyos lados son los vectores dados y considerar su área; Dados tres vectores, podemos construir un paralelepípedo cuyas aristas son los tres vectores y considerar su volumen.

Longitud, área y volumen son "números" asociados a las matrices anteriores, que hemos puesto en correspondencia con un vector, dos vectores o tres vectores y que vamos a llamar determinantes de las matrices consideradas.



ESPACIOS VECTORIALES.

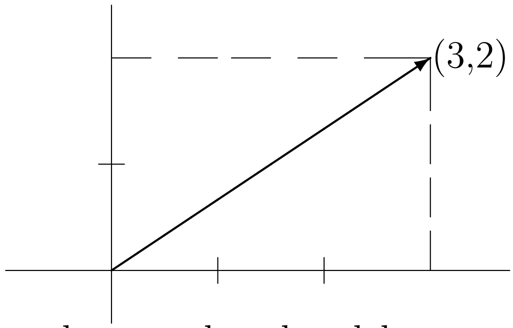
Introducción.

Consideremos el plano. Fijado un origen O y dado un punto P, uniendo el origen con ese punto por el camino más corto obtenemos un segmento orientado que se llama vector.

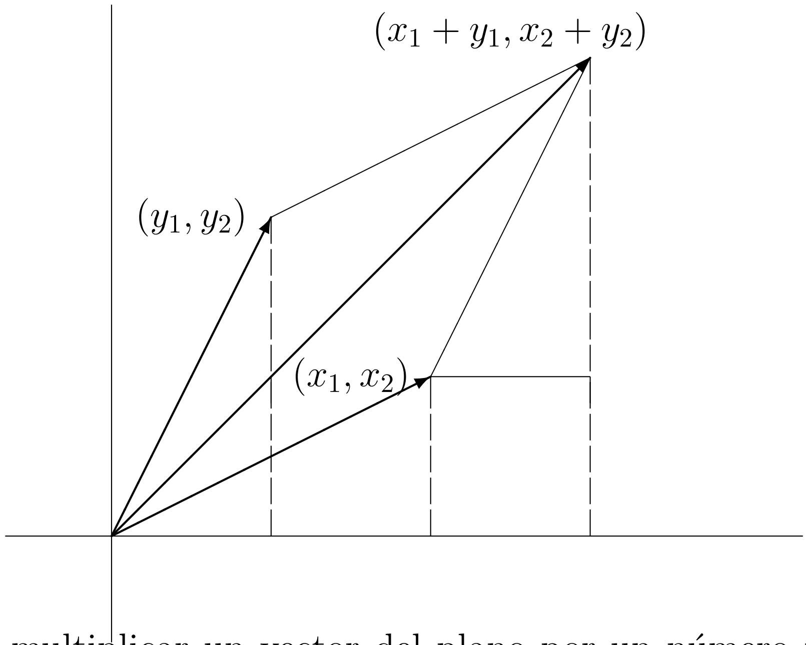
Los vectores que empiezan en el mismo origen se pueden sumar dando otro vector con el mismo origen y se pueden multiplicar por un número real dando otro vector con el mismo origen: dos vectores dados se suman por la regla del paralelogramo: trazando por el extremo del primer vector otro vector paralelo al vector que queremos sumar y considerando el extremo de este último como el extremo de la suma. Respecto a la suma son un grupo conmutativo y la otra operación, que se llama operación externa, es distributiva respecto a la suma de vectores y a la suma de números, es asociativa respecto al producto de números y el producto de 1 por cualquier vector v deja invariante a este v. Toda esta estructura recibe el nombre de espacio vectorial real.

Por otra parte, en el plano podemos trazar dos rectas perpendiculares pasando por el origen, (normalmente, una horizontal y otra vertical), llamarlas ejes y llamar origen al punto en que se encuentran. También podemos fijar un segmento como unidad de medida. A este conjunto de elementos lo llamamos sistema de referencia.

Trazando dos rectas paralelas a los ejes por el extremo de un vector que empiece en el origen obtenemos sobre los ejes, segmentos que medidos con la unidad fijada dan dos números llamados coordenadas del vector o del punto extremo del vector. Así hemos establecido otra correspondencia biyectiva entre los puntos del plano y las parejas de números reales, es decir, entre los puntos del plano y $R \times R = R^2$.



Es de observar que las coordenadas del vector suma de dos vectores dados, son la suma de las coordenadas de los vectores sumandos.



También al multiplicar un vector del plano por un número real obtenemos un vector de su misma dirección y de longitud la que tenía el vector multiplicada por el número, (si el número es negativo cambia de sentido), quedando las coordenadas del vector multiplicadas por el número.

Como las operaciones de los vectores se trasmiten a las operaciones de $R \times R$ al coger coordenadas de los vectores, la estructura de $R \times R$ debida a la suma y a la operación de multiplicación por un número real, se llama espacio vectorial real.

Podemos hacer lo análogo en el espacio trazando tres rectas perpendiculares dos a dos que se cortan en un punto del espacio llamado origen:

asociar a cada punto un vector que empiece en el origen y fijada una unidad de medida, asociar a cada punto tres coordenadas.

En el espacio podemos sumar por la regla del paralelogramo y multiplicar un vector por un número, lo cual está en correspondencia con las dos operaciones en las ternas de números reales ($R^3 = R \times R \times R$): suma y multiplicación por un número real. La suma es una operación interna. La multiplicación por un número real es una operación externa. Estas dos operaciones tienen las mismas propiedades que las operaciones análogas de R^2, por eso R^3 también tiene estructura de espacio vectorial real.

La estructura de estos conjuntos con estas operaciones puede encontrarse también en otros conjuntos utilizados en Geometría y en Análisis y por ello se estudia de manera abstracta para poder aplicar sus resultados a todos los conjuntos con la misma estructura.

Además, la introducción del concepto de dimensión en los espacios vectoriales permite comparar los conjuntos de soluciones de distintos sistemas de ecuaciones y determinar cuándo son coincidentes. También se puede simplificar el cálculo del rango de una matriz sin tener que calcular todos sus menores utilizando el concepto de dimensión.

APLICACIONES LINEALES.

Introducción.

Una aplicación lineal entre espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo es una aplicación que respeta las operaciones de espacio vectorial, es decir, aplica la suma de vectores en la suma de sus imágenes y el producto de un escalar por un vector en el producto del escalar por la imagen del vector, respectivamente.

ESPACIO VECTORIAL COCIENTE.

Introducción.

El espacio vectorial cociente recoge la estructura de los conjuntos imagen inversa de un punto por una aplicación lineal y por ello de la estructura de los conjuntos de soluciones de los sistemas de ecuaciones lineales no homogéneos. Estos conjuntos se llaman variedades afines y se encuentran también entre los elementos característicos de las aplicaciones afines.

BIBLIOGRAFÍA TOTAL.

[A1] Algebra Lineal y aplicaciones. Jorge Arvesú Carballo, Renato Alvarez Nodarse, Francisco Marcellán Español. Ed. Síntesis 1999.

[A2] La Matemática: su contenido, métodos y significado. A. D. Alexandrov, A. N. Kolmogorov, M. A. Laurentief y otros. Ed. Alianza Universidad. 1981.

[B] Juan de Burgos. Álgebra Lineal y Geometría cartesiana. 3ª edición. Ed. McGraw Hill/Interamericana de España. S. A. U. 2006.

[C] M. Castellet, I. LLerena. Álgebra Lineal y Geometría. Ed. Reverté. S. A. 1991.

[D] El Universo de las Matemáticas. Willian Dunham. Ed. Pirámide. 1994.

[F] J.B: Fraleigh R. A. Beauregard. Algebra Lineal. Addison-Wesley Iberoamericana 1989.

[G] Matemáticas 1 Bachillerato. Carlos Gonzalez García. Jesús Llorente Medrano. Maria José Ruiz Jiménez. Ed. Editex. 2008.

[G1] Algebra Lineal con aplicaciones. Stanley I. Grossman. Ed. McGraw-Hill. 1992.

[Gr] Algebra lineal con aplicaciones. S. I. Grossman. Ed. Mc Graw Hill 2001.

[L] E. M. Landesman, M. R. Hestenes. Linear Algebra for Mathematics, Science, and Engineering. Prentice-Hall International, Inc. 1992.

[L1] S. Lipschutz. Algebra Lineal. 2ª edición. Ed. McGraw Hill/Interamericana de España. S. A. U. 1992.

[M] Matemáticas 2 Bachillerato. Mª Felicidad Monteagudo Martínez. Jesús Paz Fernández Ed. Luis Vives. 2003.

[S] Algebra Superior. M. R. Spiegel. Ed. Mc Graw Hill 2000.

[S1] Algebra lineal y sus aplicaciones. G. Strang Ed. Addison-Wesley Iberoamericana. 1990.

[S2] Introduction to Linear Algebra. G. Strang. Wellesley-Cambridge Press 1993.

[Vi] Problemas de Algebra. A. de la Villa. Ed. Clagsa, 1994.

[X] S. Xambó Deschamps. Geometría. Ediciones UPC,1997.